

文章编号 1004-924X(2006)02-0308-07

Zernike 多项式拟合人眼波前像差的一种新算法

曹正林, 廖文和, 沈建新

(南京航空航天大学 机电学院, 江苏南京 210016)

摘要:提出一种用于计算人眼波前像差函数中 Zernike 多项式拟合系数的精确算法。介绍了人眼波前像差的概念以及用 Zernike 多项式表示的人眼波像差函数,采用 Householder 变换对矛盾方程的广义增广矩阵进行正交三角化,导出求解拟合系数的算法。给出了人眼大、小瞳孔的像差测量计算实例,并对比了直接构造法方程组的计算结果和精度。对比多只眼睛的计算结果表明,该算法与直接构造法方程组的计算精度相当,各项拟合系数的相对误差都在 10% 以内。该算法避免了构造法方程组引入的计算误差,易于编程,是一种比较理想的求解 Zernike 多项式拟合系数的算法。

关键词:波前像差; Zernike 多项式; Householder 变换; 拟合系数

中图分类号: R778. 2; TP391 文献标识码: A

A new algorithm for human eye's wave-front aberration fitting with Zernike polynomial

CAO Zheng-lin, LIAO Wen-he, SHEN Jian-xin

(College of Mechanical & Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A new precise algorithm for computing the fitting coefficients of the Zernike polynomial was presented. The concept of human eye's aberration and the mathematical function of wave-front aberration expressed by Zernike polynomial were introduced. The matrix of inconsistent equation group of the algorithm was orthogonalized and triangulated by Householder transformation, and the Zernike coefficients were given directly. The fitting coefficients of the Zernike polynomial of the big and small pupil were computed respectively by using this new algorithm and by constructing normal equation group. The computational results show that two algorithms have equivalent computational precision with relative error of each order coefficient in less than 10%. By avoiding the computational error introduced by constructing normal equation group, the algorithm is easy to used in programming and has proved to be an efficacious algorithm.

Key words: wave-front aberration; Zernike polynomial; Householder transformation; fitting coefficient

1 引言

人眼并非理想的的光学系统,除了离焦和散光外,人眼存在各种像差,像差的存在影响了人眼的视力和视觉质量。近年来,随着屈光手术(PRK,LASIK,LASEK)的发展,手术的安全性和稳定性越来越高,手术效果也越来越好^[1-2],但是,手术前后人眼像差的增大,会影响人眼的视觉质量^[3-4]。随着光学测量手段的发展和提高,出现了一些测量和计算像差的方法^[5-7]。像差引导的“个性化”角膜切削手术的发展,使得近年来世界上出现了研究人眼像差的热潮。

本文介绍了人眼像差的概念,并用 Zernike 多项式来表示人眼的像差。详细阐述了求解 Zernike 多项式拟合系数的一种新算法,并给出了具体的推导过程。该算法拟合精度高,计算过程简单,并且易于编程,是一种较理想的精确求解 Zernike 多项式拟合系数的方法。

2 波前像差的概念

波前是光波连续性的同相表面,波前与光线前进的方向相垂直,波前是一个面而不是一条线。在理想成像的情况下,点光源经过光学系统后所成的像应是一个以理想像点为中心的球面——理想波前。

波前像差是由实际的波前和理想的无偏差的波前之间的差值来定义的。在没有像差时,进入人眼的波前可以在视网膜上会聚成一个点,而实际的人眼光学系统并不完美,导致出射波面发生变形,不再是理想的球波面。理想波面与变形的实际波面间的光程差(OPD,Optical Path Difference),即称为人眼的波前像差。波前像差通常可以用光学路径长度的差异——光程差来表示。光线通过人眼的光学系统时,其实际波前和理想波前将会产生一定的差异,如图 1 所示,瞳孔中心 P 点,理想波前所在的瞳孔球面的中心是焦点 f ,波前像差函数 $w(x, y)$ 与理想波前和实际波前的距离成比例,对于图 1 中的折射光线,波前像差可以认为是 ab 或 $a'b$,对于人眼光学系统, ab 与 $a'b$ 基本相等,实际波前位于理想波前之前时, $w(x, y)$ 为正。

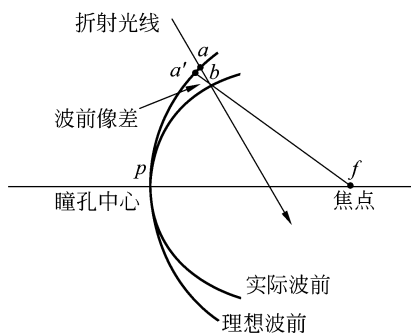


图 1 人眼的波前像差 ab 或 $a'b$

Fig. 1 Definition of the wave-front aberration of the human eye

3 波前像差的 Zernike 表示

2000 年,由印第安纳州立大学(Indiana University)、德州大学健康科学中心(University of Texas Health Science Center)等单位研究人员参加制定的 VISA(Vision Science and its Applications)标准组的研究报告——“报告人眼光学像差的标准”中提出了人眼光学像差的报告标准^[8],我们采用此标准用 Zernike 多项式来表示人眼像差。

由于波前像差是实际波面与理想波面之间的光程差,因此用计算光程的方法计算波前像差是比较方便的,各条光线的光程与通过光瞳中心的主光线的光程差值即为各光线的波前像差。鉴于约定, $W(x, y) > 0$ 表示波前比主光线相位提前,对于近视眼来说,光线传播的长度比主光线短,两者的光程差 OPD 小于零,其大小与相同位置 (x, y) 的波前相等,但符号相反,即: $OPD(x, y) = -W(x, y)$ 。

由于人眼的像空间无法测量,人眼的像差函数往往在客观空间中定义和测量,人眼像差的客观测量是通过视网膜上的一个点源来反射,一个没有像差的人眼反射出来的光线会形成 Z 正向的波面(图 2 所示),因此平面 (x, y) 形成参考波前,波前像差函数 $W(x, y)$ 为:

$$W(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i Z_i(x, y), \quad (1)$$

其中 c_i 是 Zernike 多项式的系数, $Z_i(x, y)$ 是多项式的直角坐标形式。

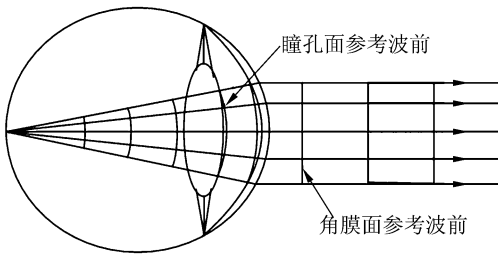


图 2 理想眼(没有像差)

Fig. 2 Ideal eye(aberration-free)

4 求解 Zernike 多项式拟合系数的新算法

4.1 矛盾方程组的建立

人眼的波前像差函数总是光滑和连续的,为了求出波前像差函数 $W(x, y)$ 中的 Zernike 多项式的系数,必须用一组离散的测量数据点,通过 Zernike 多项式来拟合该组数据,从而求出 Zernike 多项式的拟合系数。

本文利用 WFA1000 型主观式波前像差测量仪来测量所需的数据。该仪器是根据 He JC^[9] 等人的主观空间分辨屈光计 (Subjective Spatially Resolved Refractometer) 原理开发出来的。通过该仪器,可以得到从人眼角膜上 37 个不同位置进入人眼的光线在视网膜上所成像的位置坐标 (x, y) 。利用该坐标可分别得出人眼波前像差面 $W(x, y)$ 上 37 个不同位置点的斜率值,分别记为 $P_x(x, y)$ 和 $P_y(x, y)$, $P_x(x, y)$ 和 $P_y(x, y)$ 表示像差面上点 (x, y) 处对于 x 和 y 的偏微分。该组值将用于求解 Zernike 多项式的拟合系数。

如前所述,人眼的波前像差可以用波像差函数 $W(x, y)$ 表示。将 $W(x, y)$ 展开可得:

$$W(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i Z_i(x, y) = c_1 Z_1(x, y) + c_2 Z_2(x, y) + \dots + c_n Z_n(x, y) = c^T Z, \quad (2)$$

$$\text{由于 } P_x(x_i, y_i) = \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_i, y_i)}$$

$$P_y(x_i, y_i) = \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_i, y_i)}, \quad (3)$$

$$\text{综合式(2),(3)可得到矛盾方程组 } Zc = P, \quad (4)$$

$$\text{其中: } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_i, y_i)} \\ \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_i, y_i)} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_n, y_n)} \\ \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_n, y_n)} \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11}^x, Z_{21}^x, \dots, Z_{n1}^x \\ Z_{11}^y, Z_{21}^y, \dots, Z_{n1}^y \\ \vdots \\ Z_{1n}^x, Z_{2n}^x, \dots, Z_{mn}^x \\ Z_{1n}^y, Z_{2n}^y, \dots, Z_{mn}^y \end{bmatrix},$$

$$Z_{ij}^x = \left. \frac{\partial Z_i(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)}, \quad Z_{ij}^y = \left. \frac{\partial Z_i(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)}, \quad n=37;$$

为了讨论和计算的方便,将 P 和 Z 按原来的排列顺序重新标号表示,分别记为 W 和 A ,即:

$$P=W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \quad Z=A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 $m=2n$

矛盾方程组(4)则变成

$$Ac = W, \quad (5)$$

式(5)一般不存在通常意义下的解,即对任何 n 维向量 c ,一般

$$W - Ac \neq 0;$$

此时,可用最小二乘准则来求解参数 c_1, c_2, \dots, c_n ,从而导出线性方程组

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij} \right) c_j = \sum_{i=1}^m a_{ik} w_i, \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

式(6)即为求解最小二乘问题的法方程组(正则方程组),求解此方程组即可得到 c_1, c_2, \dots, c_n ,直接利用法方程组求解最小二乘问题是经典的常用的方法,但在实际应用中,构造法方程组往往会引入很大的计算误差,由于法方程组的条件数要比矛盾方程组的条件数大,常使解法方程组所引起的误差会比直接解矛盾方程组时引起的误差大得多^[10]。

直接从矛盾方程组入手,用 Householder 变换对 A 进行正交三角化,直接求解最小二乘问

题,从而避免法方程组的构造以及因构造法方程组而引入的计算误差,下面叙述 Householder 变换以及用它解最小二乘问题的正交化方法。

4.2 算法的推导

Householder 变换又称为镜像映射法或反射变换。Householder 矩阵形式为

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{u} \in R^n$ 为列矩阵, $\|\mathbf{u}\|_2^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ 。Householder 矩阵 \mathbf{H} 具有良好的性质:对称性($\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$),正交性($\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I}$)和对合性($\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$)。

实际应用中确定一个 Householder 矩阵 \mathbf{H} 的 \mathbf{u} 经常并不是单位向量,把它单位化 $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ 需要计算 $\|\mathbf{u}\|$,这是比较费时的,为此,令 $\rho = \frac{1}{2}$

$\|\mathbf{u}\|^2$, 则

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \rho^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T, \quad (8)$$

由此可见式(8)也是一个 Householder 矩阵。Householder 矩阵的一个关键性质是它能被用来把零元引进一个向量中,即:

设, $\mathbf{x} \in R^n$, $\sigma = \pm \|\mathbf{x}\|$ 且假定 $\mathbf{x} \neq -\sigma\mathbf{e}$, 作 $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, 因为

$$\rho = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1)^T(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 + 2\sigma\mathbf{x}_1 + \sigma^2) = \sigma^2 + \sigma\mathbf{x}_1$$

$$\text{所以 } \mathbf{H}\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \rho^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1)(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1)^T}{(\sigma^2 + \sigma\mathbf{x}_1)}\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1) = -\sigma\mathbf{e}_1,$$

上述计算过程说明可找到一个 Householder 矩阵 \mathbf{H} , 使得:

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = -\sigma\mathbf{e}_1, \quad (9)$$

式(9)的计算过程同时叙述了计算 \mathbf{u} 和 ρ 的过程,取 $\sigma = \text{Sign}(\mathbf{x}_1)\|\mathbf{x}\|$, 则可以求出,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}_1 + \sigma, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{x}_i, (i=2, \dots, n), \\ \rho &= \sigma(\sigma + \mathbf{x}_1), \end{aligned}$$

在实际的计算中,在获得 \mathbf{u} 后就不再需要 \mathbf{x} , 为节省内存, \mathbf{u} 的分量可以覆盖掉 \mathbf{x} 的分量。为了防止在计算过程中可能会出现上溢或下溢而导致计算无法进行,可以先对 \mathbf{x} 进行变换,具体的算法为:

算法一:

1. 计算 $\eta = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\mathbf{x}_i|\}$;

2. $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_i / \eta$, ($i=1, 2, \dots, n$);

3. 计算 $\sigma = \text{Sign}(\mathbf{u}_1)\sqrt{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 + \dots + \mathbf{u}_n^2}$;

4. $\mathbf{u}_1 \leftarrow \mathbf{u}_1 + \sigma$;

5. 计算 $\rho = \sigma\mathbf{u}_1$

6. $\sigma \leftarrow \eta\sigma$

接着,我们介绍矩阵的正交三角化过程,把 \mathbf{A} 的列向量记作 $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$, $j=1, 2, \dots, n$ 。

第一步:令 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 根据式(9),取 $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T$, 求出 $\sigma = \pm \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_1$, $\rho_1 = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_1\|^2$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - \rho^{-1}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T$, $\mathbf{H}_1\mathbf{a}_1 = -\sigma\mathbf{e}_1$, 令 $\sigma_1 = -\sigma$, 于是

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{H}_1\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1m}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & O & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mm}^{(2)} \end{bmatrix}$$

第二步:取 $\mathbf{x} = (a_{22}^{(2)}, \dots, a_{m2}^{(2)})^T \in R^{m-1}$ 根据式(9),构造 $\mathbf{H}_2' = \mathbf{I}_{m-1} - \rho_2^{-1}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T \in R^{(m-1) \times (n-1)}$, 从

而得到 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2' \end{bmatrix}$, 于是

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{H}_2\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_2 & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & O & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(3)} & \cdots & a_{mn}^{(3)} \end{bmatrix}$$

由于 $\mathbf{A}_k = \mathbf{H}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1} = \begin{bmatrix} R_k & r_k & B_k \\ 0 & C_k & D_k \end{bmatrix}$, 如此继续,

直到 $r = \min(m-1, n)$ 步为止,此时

$$\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{H}_r\mathbf{H}_{r-1}\cdots\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{cases} \text{上梯形矩阵} & n > m \\ \text{上三角矩阵} & n \leq m \end{cases}$$

在计算机上存储时,可用 $\mathbf{u}_k = (u_{k,k}, u_{k+1,k}, \dots, u_{m,k})^T$ 冲掉 \mathbf{a}_k , 数 ρ_k 和对角元 \mathbf{a}_k 可以存放在数组 \mathbf{A} 的两个附加行上,如下列形式所示

$$\begin{bmatrix} u_{11} & x & x & \cdots & x \\ u_{21} & u_{22} & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & O & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & x & \cdots & x \\ \rho_1 & \rho_2 & & & \\ a_1 & a_2 & & & \end{bmatrix}$$

在实际应用中, \mathbf{H} 由算法一确定后,则计算 $\mathbf{H}\mathbf{A}$ 的问题(其中 $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为一已知矩

阵),通过 $\mathbf{H}\mathbf{A}=(\mathbf{H}a_1, \mathbf{H}a_2, \dots, \mathbf{H}a_n)$, 简化为计算 $\mathbf{H}\mathbf{a}$ 的问题了, 由

$$\mathbf{H}\mathbf{a}=(\mathbf{I}-\rho^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{a}=\mathbf{a}-(\rho^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{a}, \quad (10)$$

可以看出, 实际上没有必要构造出矩阵 $\mathbf{H}=\mathbf{I}-\rho^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 。

根据以上的讨论, 可以写出矩阵的正交三角化的完整算法。

算法二: 设 $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ 和 $r = \min(m-1, n)$, 利用本算法求出 Householder 矩阵 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_r$, 使 $\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{H}_r \mathbf{H}_{r-1} \dots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}$ 为上梯形或上三角形矩阵, Householder 矩阵 $\mathbf{H}_k = \mathbf{I} - \rho_k^{-1} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ 中的向量 $\mathbf{u}_k = (0, \dots, 0, u_{kk}, \dots, u_{mk})^T$, 非零元 u_{ik} 冲掉 a_{ik} , 数 ρ_k 放在 $a_{m+1,k}$ 的位置上, \mathbf{A}_{r+1} 的非零元 u_{ik} (即 R_{r+1} 的元素) 除对角元 a_k 放在 $a_{m+2,k}$ 上外, 冲掉 \mathbf{A} 中的相应元素。

对于 $k=1, 2, \dots, r$, 执行第①到第⑧步

$$\textcircled{1} \text{ 计算 } \eta = \max_{k \leq i \leq m} \{ |a_{ik}| \}$$

② 计算 $\eta=0$, 置 $a_{m+1,k}=0$, 重新开始对 k 的下一个值循环;

$$\textcircled{3} a_{ik} \leftarrow u_{ik} = \frac{a_{ik}}{\eta}, \quad (i=k, k+1, \dots, m);$$

$$\textcircled{4} \text{ 计算 } \sigma = \text{Sign}(u_{kk}) \sqrt{u_{kk}^2 + \dots + u_{mk}^2};$$

$$\textcircled{5} \text{ 计算 } \mathbf{u}_{kk} = \mathbf{u}_{kk} + \sigma;$$

$$\textcircled{6} a_{m+1,k} \leftarrow \rho_k = \sigma u_{kk};$$

$$\textcircled{7} a_{m+2,k} \leftarrow a_k = -\eta \sigma;$$

⑧ 对 $j=k+1, k+2, \dots, n$, 执行下列运算:

$$\text{计算 } \beta = \rho_k^{-1} \sum_{i=k}^m u_{ik} a_{ij};$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \beta u_{ik}, \quad (i=k, k+1, \dots, m);$$

在第⑧步计算 $\mathbf{H}_k' \mathbf{D}_k$ 时, 利用式(10)的结果, 并用 $\mathbf{H}_k' \mathbf{D}_k$ 冲掉 \mathbf{D}_k

4.3 矛盾方程组的求解过程

对应于矛盾方程组式(5), 由于 $m=2n$, 如果精确地进行计算, 算法将产生一个正交矩阵

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_r \mathbf{H}_{r-1} \dots \mathbf{H}_1, \quad (11)$$

使得 $\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{Q}\mathbf{A}$ 是上三角矩阵。

用 Householder 变换解最小二乘问题就是应用 Householder 变换把矛盾方程式(5)的系数矩阵 \mathbf{A} 正交三角化, 使

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{R} 为 n 阶上三角矩阵, \mathbf{O} 为 $(m-n) \times n$ 的零矩阵, \mathbf{Q} 是由式(11)得到的一个 m 阶正交矩阵,

并把 m 维向量 $\mathbf{Q}\mathbf{W}$ 相应地分块成 n 维向量 \mathbf{C} 与 $(m-n)$ 维向量 \mathbf{d} , 即

$$\mathbf{Q}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

于是

$$\mathbf{Q}\delta = \mathbf{Q}\mathbf{W} - \mathbf{Q}\mathbf{A}c = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} \mathbf{C} - \mathbf{R}c \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

因 \mathbf{Q} 是正交矩阵, 所以 $\|\delta\|^2 = \|\mathbf{Q}\delta\|^2 = \|\mathbf{C} - \mathbf{R}c\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2$, (15)

如果选择 c , 使得 $\mathbf{C} - \mathbf{R}c = 0$, (16)

那么 $\|\delta\|^2$ 将达到最小值, 此时由式(15)可得 $\|\delta\|^2 = \|\mathbf{d}\|^2$ 。

由式(16)可知, n 阶上三角形方程组 $\mathbf{R}c = \mathbf{C}$ 的解 c 就是最小二乘解, 求解(16)式可以很容易的解出 c , c 即是所要求的拟合系数。

5 计算实例

为了考核上述算法的计算精度, 采用了 WFA1000 型主观式波前像差测量仪来测量所需的数据, 测量时针对大瞳孔和小瞳孔分别进行了测量, 大瞳孔采用 37 点测量, 小瞳孔采用 21 点测量, 然后分别用直接构造法和本文所提出的 Householder 变换法进行拟合, 拟合所得的多项式系数和拟合精度见表 1 和表 2。表 1 中的数据为用 Householder 变换法和直接构造法拟合所得的大瞳孔的 Zernike 多项式系数和精度, 表 2 中的数据为用 Householder 变换法和直接构造法拟合所得的小瞳孔的 Zernike 多项式系数和精度。其中 RMS 为均方根值, 因为第 4 项系数表示传统的离焦, 所以在计算 RMS 值的过程中将第 4 项系数设为 0。

根据表 1 和表 2 中的数据, 可以计算出两种算法所求出的各项拟合系数的相对误差, 从而检验该算法的计算精度, 相对误差可根据以下公式计算:

$$\left| \frac{Z_1 - Z_0}{Z_0} \right| \times 100\%, \quad (17)$$

其中 Z_1 表示由 Householder 变换法求得的各项拟合系数, Z_0 表示由直接构造法求得的各项拟合系数。由表 1 和表 2 中的数据计算得出, 各项拟合系数的相对误差最大值为 7.8%。为了进一步

考核该算法的计算精度,同时对多只眼睛的实测数据进行了拟合计算,其各项拟合系数的最大相对误差均在 10% 以内。由于各项拟合系数的值很小,达到最大相对误差时的拟合系数值也非常小,所以该相对误差在可以接受的范围内,由以上的计算分析可知,Householder 变换法和直接构造法的计算精度相当。

但用 Householder 变换法求解线性最小二乘问题,是一个非常稳定的方法,在稳定性和拟合精度上都优于直接构造法方程组求解最小二乘的方法,同时可以避免法方程组的病态,计算过程简单,易于编程,缺点是计算量较大,算法的推导比较复杂。

表 1 大瞳孔的 Zernike 多项式拟合系数和精度

Tab. 1 Fitting coefficients and fitting precision of the big pupil using Zernike polynomial

项号	Householder 变换法	直接构造法	项号	Householder 变换法	直接构造法	项号	Householder 变换法	直接构造法
1	0	0	13	-0.06648	-0.06514	25	0.022234	0.023562
2	0	0	1	4-0.15515	-0.15725	26	-0.06581	-0.06602
3	0.343448	0.342237	15	0.179594	0.180984	27	-0.04898	-0.04924
4	1.774328	1.783482	16	0.079117	0.079067	28	-0.01972	-0.01994
5	0.118982	0.119828	17	-0.10419	-0.10309	29	0.04125	0.04113
6	0.160145	0.160582	18	0.103216	0.106336	30	0.099346	0.099894
7	-0.05214	-0.05101	19	0.045152	0.045375	31	-0.01776	-0.01782
8	-0.0462	-0.0476	20	-0.02699	-0.02711	32	-0.04754	-0.04876
9	-0.07423	-0.07722	21	-0.1359	-0.136	33	0.056235	0.056474
10	0.095495	0.097293	22	-0.10325	-0.10444	34	0.039312	0.042015
11	-0.01432	-0.01488	23	0.049293	0.053349	35	0.15986	0.16248
12	-0.00414	-0.00423	24	0.029115	0.031335	RMS	0.594285	0.598083

表 2 小瞳孔的 Zernike 多项式拟合系数和精度

Tab. 2 Fitting coefficients and fitting precision of the small pupil using Zernike polynomial

项号	Householder 变换法	直接构造法	项号	Householder 变换法	直接构造法	项号	Householder 变换法	直接构造法
1	0	0	8	0.010132	0.010057	15	0.0182	0.0185
2	0	0	9	0.039123	0.039066	16	-0.04932	-0.04914
3	0.022125	0.022671	10	-0.04501	-0.04567	17	0.007398	0.007434
4	0.921452	0.917364	11	-0.00491	-0.00521	18	-0.03686	-0.03675
5	0.151431	0.159633	12	-0.000598	-0.00061	19	0.01101	0.01194
6	0.051058	0.051085	13	0.000711	0.000719	20	0.027268	0.027829
7	-0.00769	-0.0077	14	0.004308	0.004313	RMS	0.186631	0.193661

6 结 论

本文介绍了人眼波前像差的概念,Zernike 多项式表示的波像差函数,并详细阐述了求解波像差函数中 Zernike 多项式拟合系数的一种新算

法,给出了具体的计算实例。由计算实例可以看出,该算法与普遍采用的直接构造法方程组方法的计算精度相当,但 Householder 变换法的稳定性好,计算过程简单,易于编程,因而该方法是一种较为理想的精确求解 Zernike 多项式系数的方法。

参考文献:

- [1] 叶寒,廖文和,沈建新.波前像差引导的角膜切削模型及实现技术的研究[J].光学精密工程,2004,12(1):31-36.
YE H,LIAO W H,SHEN J X. Wave-front guided ablation on cornea[J]. *Optics and precision Engineering*, 2004, 12(1):31-36. (in Chinese)
- [2] 张运海,沈建新,廖文和.准分子激光矫正复性近视散光的屈光学机理及应用[J].光学精密工程,2003,11(3):291-295.
ZHANG Y H,SHEN J X,LIAO W T. Use of excimer to correct compound myopic astigmatism[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2003, 11(3):291-295. (in Chinese)
- [3] OSHIKA T,MIYATA K,TOKUNAGA T, *et al.* Higher order wave-front aberrations of cornea and magnitude of refractive correction in laser in situ keratomileusis[J]. *Ophthalmology* 2002, 109(6):1154-1158.
- [4] BARRIUSO E M,LLOVES J ,MARCOS S, *et al.* Ocular aberrations before and after myopic corneal refractive surgery: LASIK-induced changes measured with laser ray tracing[J]. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 2001, 42(6):1396-1403.
- [5] HAMENT W J,NABAR V A,NUIJTS R M M A. Repeatability and validity of Zywave aberrometer measurements [J]. *Journal of Cataract & Refractive Surgery*, 2002, 28(12):2135-2141.
- [6] SALMON T,THIBOS L,BRADLEY A. Comparison of the eye's wave-front aberration measured psychophysically and with the Shack-Hartmann wave-front sensor[J]. *J Opt. Soc Am A*, 1998,15:2457-2465.
- [7] HOWLAND H C. The history and methods of Ophthalmic wave-front sensing [J]. *Journal of Refractive Surgery*, 2000,16(9/10):S552-S553.
- [8] THIBOS L N,APPLEGATE R A,SCHWIEGERLING J T, *et al.* Standards for reporting the optical aberration of eyes[J], *Journal of Refractive Surgery*,2002,18(5):S652-S665.
- [9] HE J C, MARCOS S. Measurement of the wave-front aberration of the eye by a fast psychophysical procedure[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1998, A15:2449-2455.
- [10] 鄢静舟,孙厚环,高志强,等.用 Zernike 多项式进行波面拟合的一种新算法[J]. 数学物理学报,2000,20(3):378-385.
YAN J ZH,SUN H H,GAO ZH Q, *et al.* A new algorithm for wave-front fitting using Zernike polynomial[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2000, 20(3):378-385. (in Chinese)

作者简介:曹正林(1978—),男,江苏宿迁人,南京航空航天大学博士研究生,主要从事计算机辅助生物医学工程、CAD/CAM 技术方面的研究;

廖文和(1965—),男,江西万年人,南京航空航天大学教授,博士生导师,主要研究方向为 CAD/CAM、制造业信息化、生物医学工程,发表学术论文 40 余篇;

沈建新(1969—),男,江苏常熟人,南京航空航天大学副教授,主要研究方向为 CAD/CAM、制造业信息化、生物医学工程,发表学术论文 20 余篇。